

۱. تابع $\Phi: \{\phi_1=x, \phi_2=y\}$ in $R=\{x,y\}$ مفروض است. همه توابع آستانه خطی $L(\Phi)$ و متناظر بولین آنها را برای وقتی که Φ بر اساس دو متغیر ϕ_1 و ϕ_2 در فضای R در نظر گرفته می شود را بنویسید. (راهنمایی ۱۶ تابع بولین برای ۲ متغیر وجود دارد). آیا $L(\Phi)$ شامل همه توابع بولین x و y می شود؟ اگر نه چه توابعی را شامل نمی شود.

۲. یک شبکه مربعی به صورت زیر تعریف شده، در این شبکه $T(n,m)$ نشان دهنده تعداد کوتاهترین مسیر ها از $(0,0)$ به (n,m) است.

$$\begin{matrix} (0,0) & (0,1) & \dots & (0,m) \\ (1,0) & (1,1) & \dots & (1,m) \\ \vdots & & & \\ (n,0) & (n,1) & \dots & (n,m) \end{matrix} \quad \text{شرایط مرزی:} \begin{cases} T(n,0) = 1 \\ T(0,m) = 1 \end{cases}$$

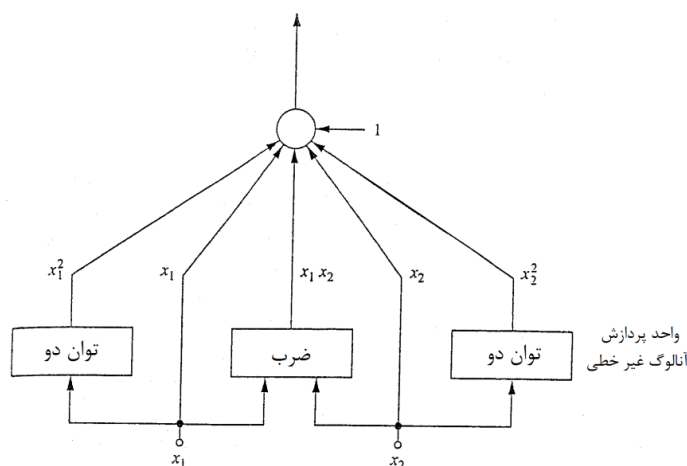
الف) ثابت کنید $T(n,m)$ پاسخی به معادله تفاضلی دوبعدی $T(n,m) = T(n,m-1) + T(n-1,m)$ بوده و نشان دهید:

$$T(n,m) = \binom{n+m}{m} = \binom{n+m}{n}$$

ب) با هر روشی که می توانید ثابت کنید معادله تفاضلی دوبعدی $L(n,m) = L(n-1,m) + L(n-1,m-1)$ معادله زیر را ایجاد کرده است.

$$L(n,m) = \begin{cases} 2 \sum_{i=0}^n \binom{n-1}{i} & n > m+1 \\ 2^n & n \leq m+1 \end{cases} \quad \text{شرایط مرزی:} \begin{cases} L(1,m) = 2 \\ L(n,1) = 2n \end{cases}$$

۳. با توجه به پرسپترون با واحد پیش پردازش آنالوگ غیر خطی نشان داده شده در نمودار زیر، چه نوع سطوح تصمیم گیری می تواند تحقق یابد؟ ظرفیت دستگاه چیست؟



۴. یک پرسپترون تک لایه با واحد پیش پردازش آنالوگ غیر خطی برای صفحه تصمیم دایره ای بسازید. ظرفیت دستگاه چیست؟

۵. قبل از انجام الگوریتم یادگیری پرسپترون، بردار الگوی به شکل $(y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m)^T$ با اضافه کردن یک عدد ۱ به آن گسترش می یابد و به صورت بردار تکمیل شده $(y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m \ 1)^T$ در می آید. چرا این کار انجام می شود؟ آیا ثابت های دیگری مثل ۵، ۰ و ۱۰ می تواند به جای ۱ مورد استفاده قرار گیرد؟ در مواردی که یک ثابت غیر صفر و متفاوت از ۱ مورد استفاده قرار می گیرد، پس از

همگرایی، مقدار آستانه معادل این TLU، بدون اتصال مجموعه ورودی با این مقدار ثابت، چه خواهد بود؟ برای الگوهای مختلف می توان ثابت های متفاوتی مورد استفاده قرار داد؟

۶. الگوریتم یادگیری پرسپترون را برای دسته بندی الگوهای باینری تک قطبی زیر که ۳ بعد دارند، اعمال کنید. الگوهای تکمیل نشده عبارتند از:

$$\text{Class A: } \{x\} = \{(0,0,0), (1,1,1)\}$$

$$\text{Class B: } \{x\} = \{(0,0,1), (0,1,1)\}$$

شکل پرسپترون حاصل، را با اتصالاتش، وزنهای داده شده، آستانه، و تابع انتقال مشخص شده آن رسم کنید.

۷. قانون تصحیح مطلق را روی الگوهای دودویی تک قطبی تکمیل نشده زیر اعمال کنید. می دانیم پس از تکمیل الگو و تنظیم، یک مجموعه سه تایی حاصل می شود.

$$C_+ : \{(0,0), (0,1)\}$$

$$C_- : \{(1,0), (1,1)\}$$

۸. قانون افزایش ثابت را با $C = 1$ روی الگوهای باینری تک قطبی ۳ بعدی زیر (قبل از تکمیل شدن) اعمال کنید.

$$C_+ \{ (0,0,0), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0) \}$$

$$C_- : \{ (0,0,1), (0,1,1), (0,1,0), (1,1,1) \}$$

$$w_0 = (-1 \ -2 \ -2 \ 0)^T \text{ را به عنوان بردار وزن اولیه در نظر بگیرید..}$$

۹. نشان دهید که راه حل شبه معکوس $w^* = S^+d$ متوسط مربع خطا را در مواردی که تمام ورودی ها اعداد حقیقی هستند، به حداقل می رساند.

$$e^2 = \frac{1}{N} \|d - Sw\|^2 = \frac{1}{N} (d - Sw)^T (d - Sw)$$

۱۰. (الف) از معادله عمومی به روز رسانی کاهش گرادیان استفاده کنید

$$w(k+1) = w(k) - c \left\{ \frac{\partial E(w, x)}{\partial w} \right\}_{w=w(k)}$$

$$E(w, y, T) = \frac{1}{8\|y\|^2} \left[(w^T y - T) - |w^T y - T| \right]^2 \quad \text{با تابع خطای}$$

که در آن $T > 0$ ، و از آن یک الگوریتم تصحیح خطای پرسپترون استخراج کنید.

(ب) $c=T=1$ بگیرید. الگوریتم به دست آمده در (الف) را برای الگوهای مسئله ۴.۷ اعمال کنید.

(ج) در مورد اثر افزایش T روی همگرایی الگوریتم، برای الگوهای تفکیک پذیر خطی بحث کنید.

۱۱. یک بردار الگوی تکمیل شده $y(k) = (y_1(k) \ y_2(k) \ \dots \ y_n(k))^T$ و یک بردار وزن $w = (w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n \ w_{n+1})^T$ را در نظر بگیرید. فرض کنید بردار تکمیل شده الگوی متعلق به کلاس C در -1 ضرب شده اند. تمام الگوهای بعد از این تغییر را در مجموعه $result$ فراخوانی کنید و یا مجموعه الگوهای تکمیل شده را تنظیم کنید.

(الف) نشان دهید که اگر الگوها جدپذیر خطی باشند، یک راه حل \hat{w} برای هر بردار الگوی y در مجموعه $result$ وجود دارد که در آن $\hat{w}^T y > T$. (یک عدد حقیقی نامنفی است.) تفسیر هندسی فضای وزن چیست؟

(ب) فاصله نرمال از یک بردار الگوی گسترش یافته $y(k)$ به ابرصفحه تصمیم گیری تعریف شده با $w^T y(k) = 0$ برابر مقدار زیر است:

که در آن N تعداد الگوهاست. یک ابرصفحه تصمیم گیری بهینه می دهد به این معنا که حداقل فاصله از تمام الگوهای آموزشی به اندازه بزرگترین مقدار ممکن افزایش می یابد. کمترین فاصله تمامی الگوهای آموزشی را از ابرصفحه تصمیم به دست آمده پس از همگرایی قانون افزایش ثابت تغییر یافته زیر، پیدا کنید.

$$d = \frac{|w^T y(k)|}{\|w\|} \geq \alpha$$

$$Let : \alpha = \max_w \min_{\{y(k)\}_{k=1}^N} \frac{|w^T y(k)|}{\|w\|}$$

$$w(k+1) = \begin{cases} w(k) + y(k) & \text{if } w^T y(k) \leq T \\ w(k) & \text{if } w^T y(k) > T \end{cases}$$

۱۲. دو کلاس الگوی زیر را قبل از تکمیل شدن، در نظر بگیرید، شگفت آور است که بدانید ممکن است همگرایی هر یک از قوانین تصحیح خطای پرسپترون به یک راه حل، به هزاران تکرار نیاز داشته باشد. الگوها را به روش استاندارد تکمیل کنید.

$$C_+ : \{ (57.595722, -99.759033) \}$$

$$C_- : \{ (41.887859, -72.551994) \}$$

(الف) یک پیاده سازی کامپیوتری برای هر یک از قوانین تصحیح خطا بنویسید تا تایید این امر را نشان دهد.

(ب) توضیح دهید که چرا این امر برای حل یک چنین مسئله ساده ای، بسیار طول می کشد. یک روش عمومی برای سرعت بخشیدن به همگرایی الگوریتم پرسپترون پیشنهاد دهید که تکرارهای مورد نیاز برای همگرایی را به زیر ۵۰ مورد کاهش می دهد.

(ج) قسمت (الف) و (ب) را با الگوریتم Widrow-Hoff LMS تکرار کنید.

(د) روش به دست آمده خود در (ب) را به الگوهای ابعاد بالاتر تعمیم دهید.

۱۳. در بسیاری از برنامه های کاربردی، برخی از اجزای بردارهای آموزشی مشخص نشده است، و این امر یا به دلیل عدم دسترسی آنها و یا به خاطر نویز بیش از حد در اندازه گیریشان است. این اجزاء را جزء نامشخص گویند. در الگوهای مختلف، جزء نامشخص ممکن است متفاوت باشد. الگوریتم پرسپترون را به الگوهای با اجزای نامشخص تعمیم دهید.

$$\nabla_k = \frac{\partial E(e_k^2)}{\partial w(k)} = 2(Qw(k) - p) . \quad ۱۴. معادله ۴.۴۳ متن را اثبات کنید$$

۱۷. دو بردار زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} v &= (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_m) & v_1 > v_2 > \dots > v_m > 0 \\ w &= (w_1 \ w_2 \ \dots \ w_m) & 0 > w_1 > w_2 > \dots > w_m \end{aligned}$$

یک جایگشت P از 1, 2, ..., m مربوط به هر یک از موارد زیر پیدا کنید. هر جایگشت را با نوشتن یک بیان بهینه سازی شده مطلوب، شناسایی کنید.

(a) $S_I = \sum v_i w_{p(i)}$ یک مقدار min دارد.

(b) $S_I = \sum v_i^2 w_{p(i)}^2$ یک مقدار max دارد.

۱۸. فرض کنید ۸ داده ورودی باینری $x = (x_7 \ x_6 \ \dots \ x_0)$ داریم که $x_7 x_6 \ \dots \ x_0$ می تواند یک عدد باینری X در نظر گرفته شود. $B(x)$ را یک نمایش دهدهی از اعداد دودویی در نظر بگیرید. مثلاً عدد دهدهی 35 (مبنای ۱۰) همان عدد دودویی 00100011 (مبنای ۲) است. یک پرسپترون ساده برای محاسبه این تابع گزاره طراحی کنید.

$$\Psi_I = \begin{cases} 1 & B(x) \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

مقدار support گزاره Ψ_I چیست؟

Ψ را یک تابع حد آستانه خطی با توجه به خانواده گزاره های Φ که توسط شبکه $R = (x_7, x_6, \dots, x_0)$ تعریف شده، بگیرید.

$$\Psi(x) = P_B \left[\sum_{\Phi_i \in \Phi} \alpha_i \Phi_i(x) - \theta \right]. \quad \text{دراینصورت } \Psi \text{ به شکل زیر درمی آید.}$$

که x یک عدد حقیقی زیرمجموعه R, θ است. و حد آستانه Φ_i یک گزاره از خانواده Φ بوده و داریم:

$$P_B[y] = \begin{cases} 1 & \text{if } y \geq 0 \\ 0 & \text{if } y < 0 \end{cases}$$

مقدار support گزاره های تقریبی Φ_i چیست؟ پیچیدگی پرسپترونی که طراحی کرده اید چیست؟

۱۹. مسئله ۱۸ را با Ψ_2 زیر به عنوان تابع گزاره تکرار کنید.

$$\Psi_2 = \begin{cases} 1 & B(x) \geq 8 \text{ and } B(x) \text{ is odd} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

۲۰. تابع گزاره زیر را در نظر بگیرید:

$$\Psi(x) = P_B \left[\sum_{x_i \in R} x_i + b \sum_{x_i} \sum_{\substack{x_j \\ i < j}} x_i x_j - c \right]$$

که در آن a, b, c اعداد ثابت حقیقی هستند. پیچیدگی تابع Ψ_x چیست؟ اگر تابع Ψ_x به شکل زیر بیان شود

$$\Psi(x) = P_B [\alpha_i \phi_i(x) - \theta]$$

α_i , $\phi_i(x)$, θ را به فرم a, b, c, x_i بنویسید. اگر یک پرسپترون برای Ψ_x پیاده سازی شود، چند اتصال برای آستانه خروجی این واحد منطقی وجود دارد؟ با توجه به این که کاردینالیتی شبکه $|R|$ است.

۲۱. پیچیدگی گزاره $\varphi(|x|) = [|x| = M_1 \vee |x| = M_2]$ که در آن $M_1 < M_2$ ، M_1 و M_2 اعداد صحیح مثبت دلخواه هستند چیست؟